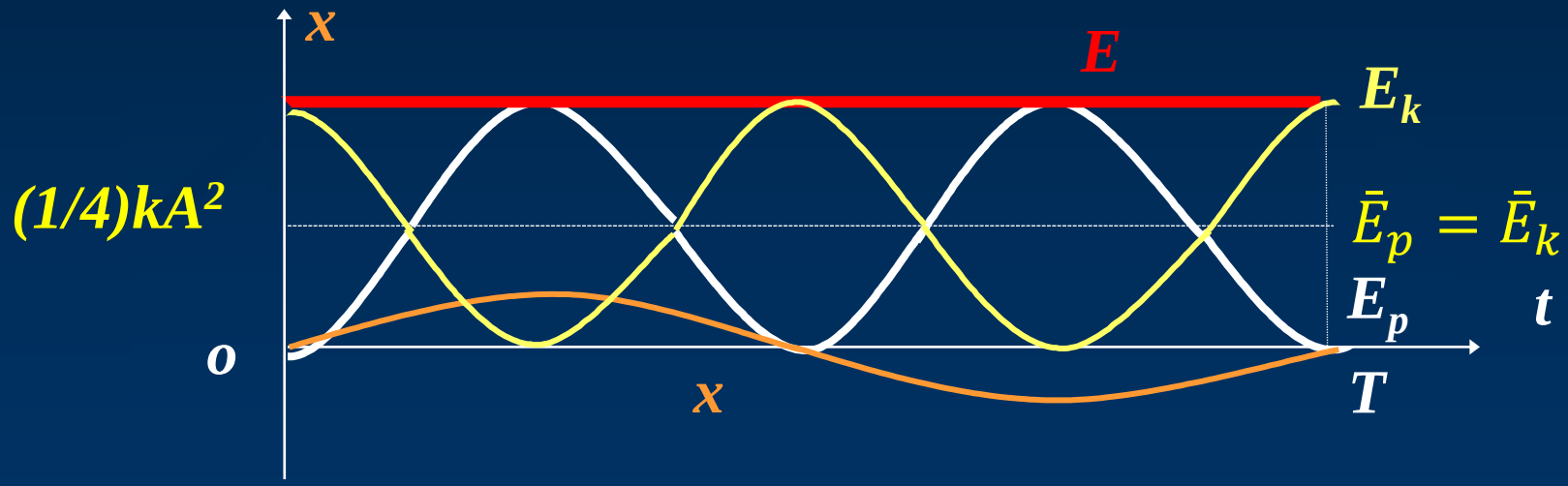
讨论： 1. 谐振动系统的动能和势能在一个周期内的平均值：

$$\bar{F}=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt$$

$$\bar{E}_P=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kx^2dt=\frac{1}{4}kA^2=\frac{1}{2}E_0$$

$$\bar{E}_k=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}mv^2dt=\frac{1}{4}kA^2$$



2. 在谐振动中，系统的机械能保持不变

3. 由能量关系建立谐振动方程

由机械能守恒，有 $\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=E_0$

除以 $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)=0$

$v=\frac{dx}{dt}$

$m\frac{dv}{dt}+kx=0$

$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$

推广： 若系统势能与振动位移有类似 cx^2 的函数形式（c 是与系统性质有关的参量），则此系统作简谐振动。

$E_P=cx^2$ → $F=-\frac{\partial E_P}{\partial x}=-2cx$ → 线性回复力

例4： 见书p119 ——→ 式（3.28）

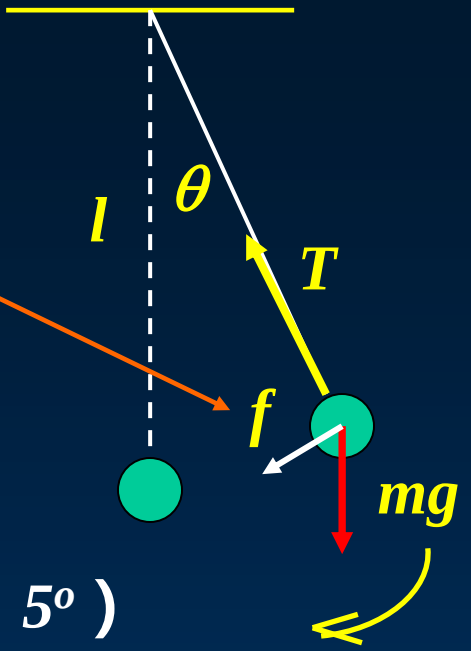
质点在球内任一点，引力势能 $E_P=-GMm\left(\frac{3R^2-r^2}{2R^3}\right)$

→ $F=-\frac{\partial E_P}{\partial r}=-GMm\frac{r}{R^3}=-\left(G\rho\frac{4\pi m}{3}\right)r$ — 线性回复力

六、谐振动应用举例及研究方法

例1：单摆

$$f = mg\sin\theta$$



$$-mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

动力学规律

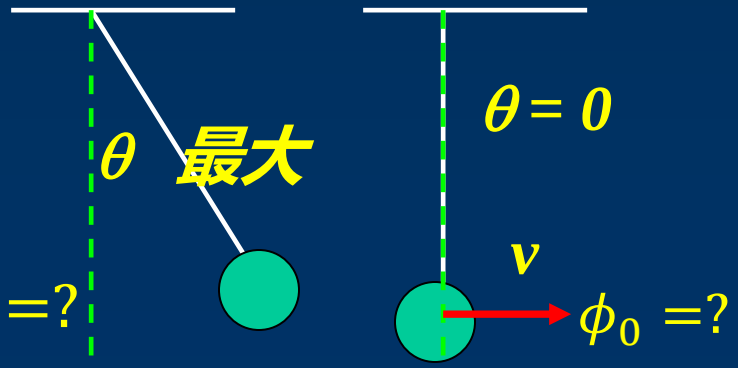
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta \approx \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0} \quad (\theta < 5^o)$$

$$\theta = \theta\cos(\omega t + \phi_0)_{\max}$$

Discussion
- 准弹性力概念
- 单摆相位讨论

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

—— 由振动系统性质决定



推广：复摆

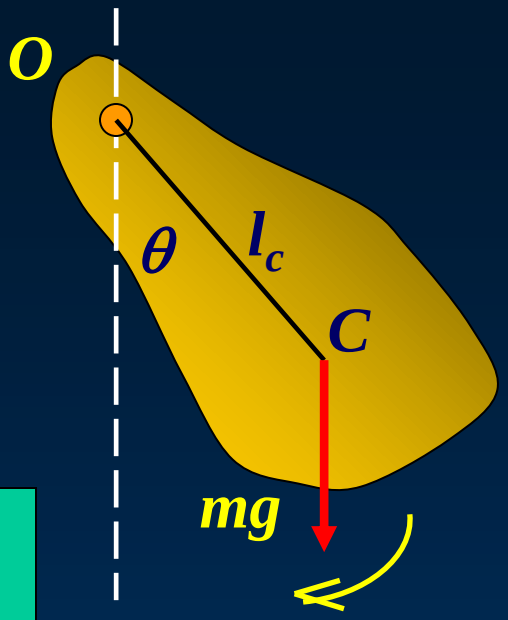
- 转动定律

$$M = J\beta \Rightarrow -mg\sin\theta\, l_c = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl_c}{J}\sin\theta = 0$$

- 固有角频率

$$\omega^2 = \frac{mgl_c}{J}$$



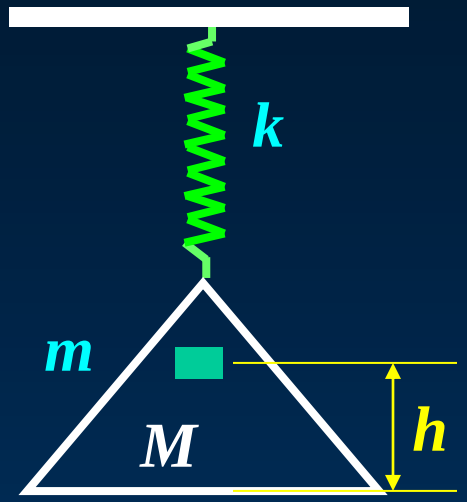
当 $\theta < 5^\circ$ 时

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta\cos(\omega t + \phi_0)_{\max}$$

- **结论：复摆在作微小摆动时，运动方程与弹簧振子形式相同**

问答：一个单摆和一根细棒绕端点构成的复摆，其质量均为m，单摆的线长和细棒的长度均为l，比较两摆作微小摆动周期？

例1： 已知如图所示，以盘 M 和物体 m 相碰瞬间为计时零点(t=0)，令碰后平衡位置为原点，求振动方程



解： 静止时，弹簧伸长为 Δl_0 有

$$Mg - k\Delta l_0 = 0 \cdots\cdots (1)$$

碰后平衡位置处,弹簧伸长为 Δl_1 有

$$(M+m)g - k\Delta l_1 = 0 \cdots\cdots (2)$$

任意 x 位置处受力有 **静平衡点为坐标原点**

$$f = (M+m)g - k(\Delta l_1 + x)$$

$$(M+m)\ddot{x} = (M+m)g - k(\Delta l_1 + x) \cdots\cdots (3)$$

将(2)代入(3)得 $(M+m)\ddot{x} = -kx$ $\xrightarrow{t=0}$ $\omega = \sqrt{k/(m+M)}$

令振动方程为$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

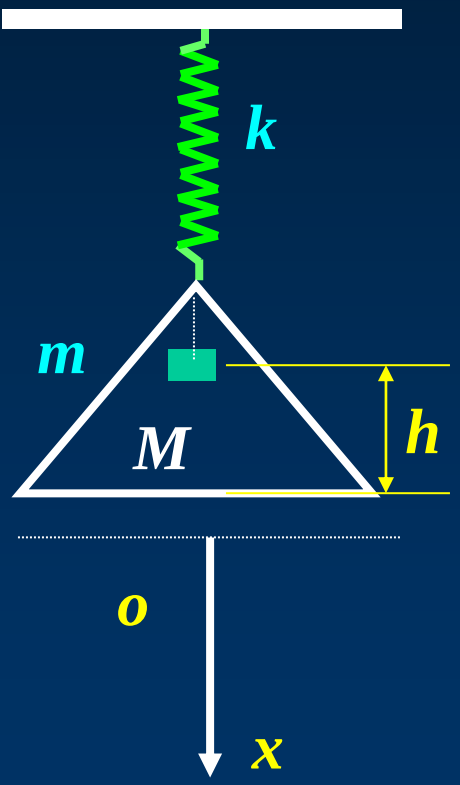
系统固有特性

$$x_0 = -(\Delta l_1 - \Delta l_0) = -mg/k\,, \qquad v_0(m+M) = mv, v = \sqrt{2gh}$$

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh} \\ x_0 &= -mg/k \end{aligned}\right\}$$

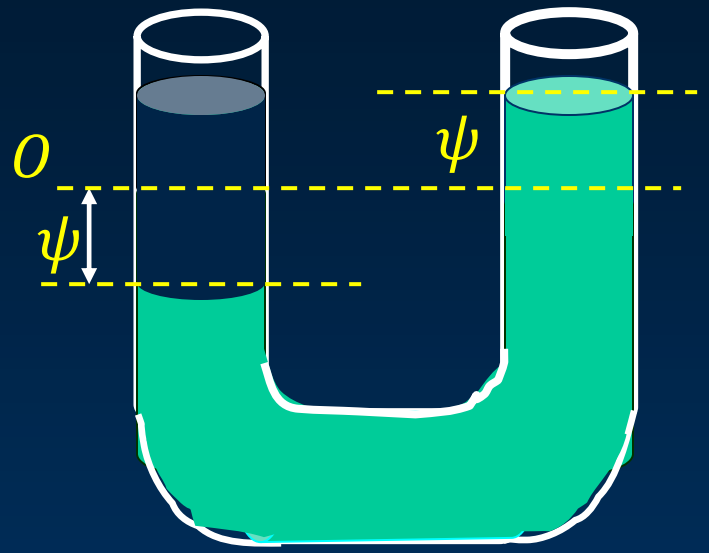
$$\Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2} \\ \phi = \arctan(-v_0/\omega x_0) \end{cases}$$

$\because x_0 < 0, v_0 > 0 \quad \therefore \phi$为第三象限角



例3： 连通管中液体柱的运动，如图示。已知液体的总质量为 $m=\rho LS$ ，忽略粘滞阻力。**求**振动周期。

解： 液体柱内各部分具有相同速率。



t 时刻，系统动能为

$$E_K=\frac{1}{2}\rho LS\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

t 时刻，系统势能为

$$E_p=\rho\psi Sg\psi=\rho Sg\psi^2$$

t 时刻，系统机械能 $E=E_K+E_P=C$ —— **机械能守恒**

• 时间求导：

$$\rho LS\left(\frac{d\psi}{dt}\right)\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)+2\rho Sg\psi\frac{d\psi}{dt}=0$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+\frac{2g}{L}\psi=0 \quad\Leftarrow\quad \omega=\sqrt{\frac{2g}{L}} \quad\Leftarrow\quad T=2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

小结：

分析振动系统 → 求动力学方程 → 求运动学方程

- 动力学特征 $F = -kx$
- 运动学特征 $a = -\omega^2 x$
- 能量特征 $E = C$

- 求解圆频率 ω
- 求解振动周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

- 求解振幅 A
- 求解初相 ϕ_0

- 曲线法
- 旋转矢量法
- 初始条件

13-2 谐振动合成

一、同方向、同频率振动的合成

设在同一直线上，有分振动

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

1. 解析法

分振动：

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_2) \end{cases}$$

合振动：

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \phi_1) + A_2\cos(\omega t + \phi_2)$$

$$= \underbrace{(A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2)}_{A\cos\phi}\cos\omega\ t - \underbrace{(A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2)}_{A\sin\phi}\sin\omega\ t$$

$$x = A\cos\phi\cos\omega\, t - A\sin\phi\sin\omega\ t = A\cos(\omega\, t + \phi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)}$$

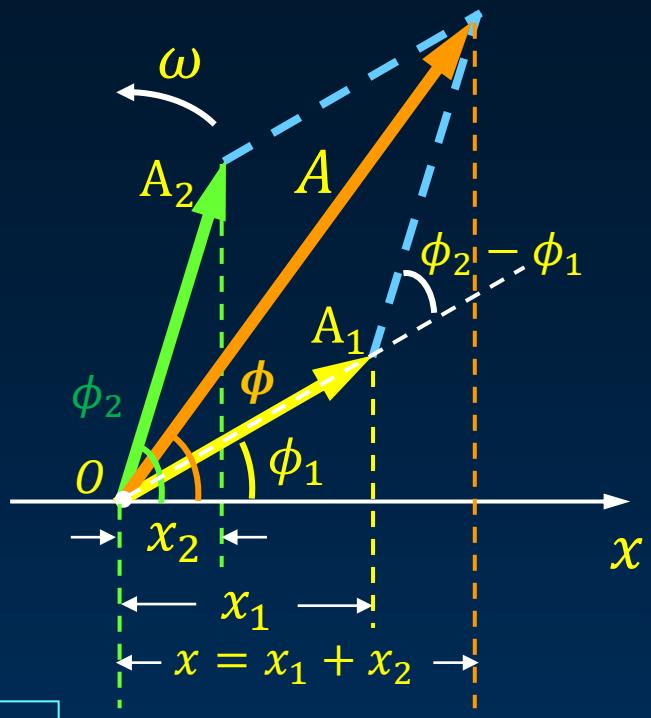
$$\tan\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$$

➢ **结论：合振动 x 仍是简谐振动**

2. 旋转矢量法

分振动

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \phi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \phi_2) \end{cases}$$



合振动

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)}$$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$$

- **结论：与解析法求得的结果一致，方法直观、简捷.**

➢ 讨论:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\phi_2-\phi_1)}$$

(1)若两分振动同相,即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi$ (k=0,1,2,…),

则 $A=A_1+A_2$，两分振动相互加强，当 $A_1=A_2$ 时，$A=2A_1$,

(2)若两分振动反相,即 $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi$ (k=0,1,2,…),

则$A=|A_1-A_2|$，两分振动相互减弱，当 $A_1=A_2$ 时, $A=0$.

3. n 个同方向同频率谐振动的合成

例 设有 n 个同方向、同频率、振幅 a 相同、初相差依次为一常量 ε 的谐振动，它们的振动分别为

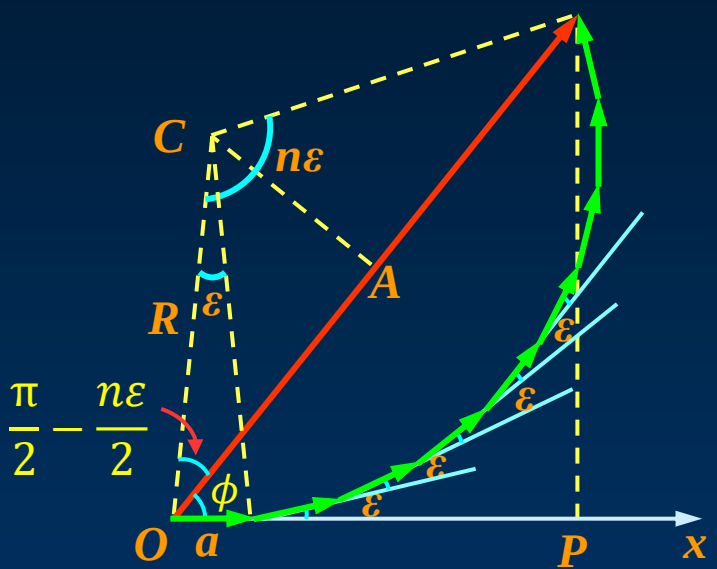
$$x_1 = a\cos\omega t$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \varepsilon)$$

$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\varepsilon)$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$x_n = a\cos[(\omega t + (n-1)\varepsilon]$$



求 合振动的振动方程.

解

$$x = \sum x_n = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$a = 2R\sin\frac{\varepsilon}{2} \qquad A = 2R\sin\frac{n\varepsilon}{2}$$

$$A = a\frac{\sin n\,\varepsilon/2}{\sin\varepsilon/2} \qquad \phi = \frac{1}{2}(\pi - \varepsilon) - \frac{1}{2}(\pi - n\varepsilon) = \frac{n-1}{2}\varepsilon$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi) = a\frac{\sin\frac{n\varepsilon}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\cos[\omega t + \frac{(n-1)\varepsilon}{2}]$$

讨论:

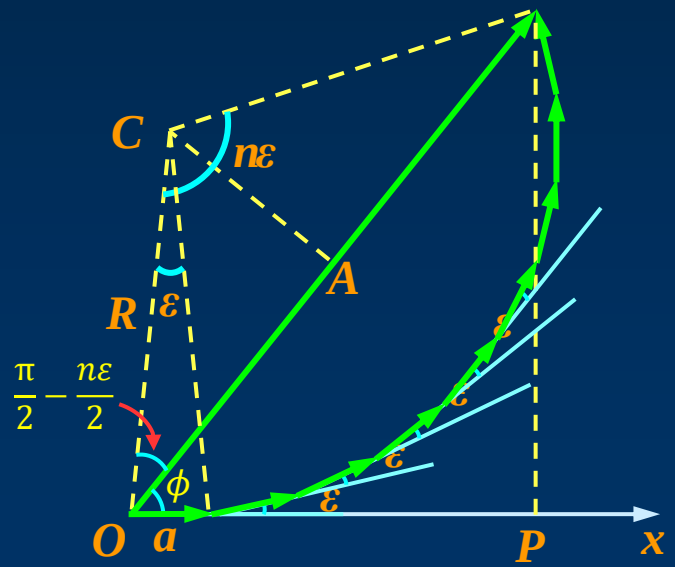
极大值: $\varepsilon = 2k\pi$



$$A = na$$

极小值: $\varepsilon = \frac{2k'\pi}{n}$, $k' \neq nk$

$$A = 0$$



例　有三个同方向、同频率的简谐振动，振动方程分别为：

$$x_1 = 0.05\cos(\pi t) \qquad x_2 = 0.05\cos(\pi t + \frac{\pi}{3})$$

$$x_3 = 0.05\cos(\pi t + \frac{2\pi}{3})$$

试求合振动的振动方程

解　合振动振幅为：

$$A = \sqrt{(A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2 + A_3\cos\phi_3)^2 + (A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2 + A_3\sin\phi_3)^2}$$

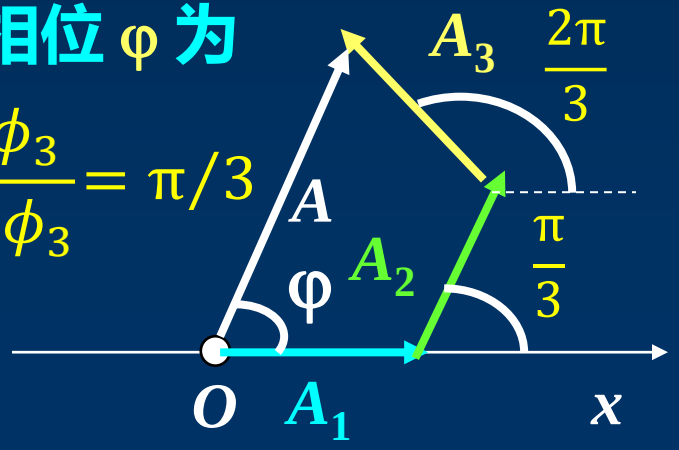
$$= A_0\sqrt{(1 + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3})^2 + (\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3})^2}$$

$$= 0.05\sqrt{1+3} = 0.10(\mathrm{m})$$

合振动初相位 φ 为

$$\phi = \arctan\frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2 + A_3\sin\phi_3}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2 + A_3\cos\phi_3} = \pi/3$$

合振动方程　$x = 0.10\cos(\pi t + \frac{\pi}{3})$



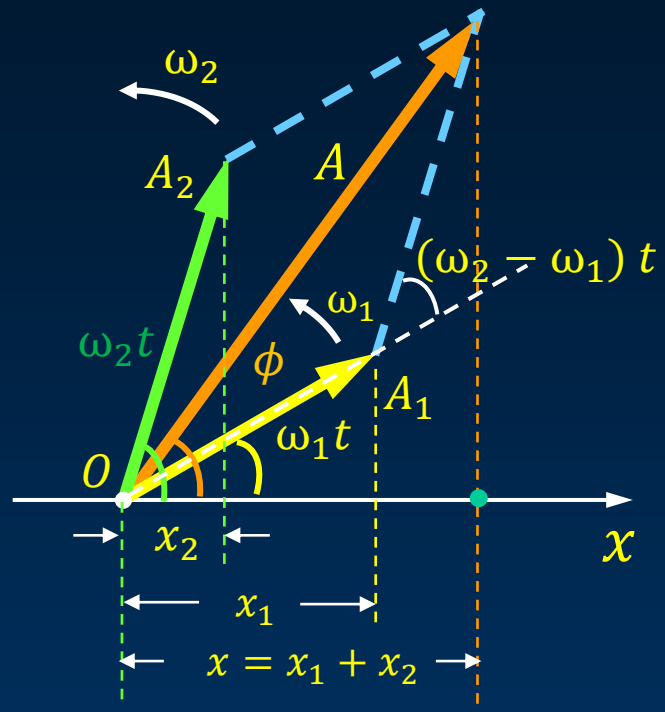
二、同方向不同频率谐振动的合成　拍

分振动：$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega_1 t \\ x_2 = A_2 \cos \omega_2 t \end{cases}$

合振动：$x = x_1 + x_2$

合振动的振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t}$$



当 $(\omega_2 - \omega_1)\, t = 2k\pi$ 时，

A 有最大值：$A = A_1 + A_2$

当 $(\omega_2 - \omega_1)\, t = (2k+1)\,\pi$ 时，A 有最小值：$A = |A_1 - A_2|$

- **结论：** 合振动 x 不再是简谐振动，合振动振幅的频率为

$$(\omega_2 - \omega_1)\, T = 2\pi \qquad v = \left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}\right| = |v_2 - v_1|$$